



TITLE:

複数のスペクトルパラメタを持つ 高次元可積分系について

AUTHOR(S):

大山, 陽介

CITATION:

大山, 陽介. 複数のスペクトルパラメタを持つ高次元可積分系について.
数理解析研究所講究録 1991, 763: 1-7

ISSUE DATE:

1991-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/82258>

RIGHT:

複数のスペクトルパラメタを持つ高次元可積分系について

数理解・大山陽介^{*} (Ohyama, Yousuke)

KP 方程式系の高次元化を考える時に問題となったのは、naïve に考えると得られる発展方程式が一般には有限の閉じた形にならないということであった([1])。そこで、([2])では話を逆にして、発展方程式が閉じた形になる条件を考えることで、自己双対 Yang-Mills 方程式 (SDYM) と自己双対 Einstein 方程式 (SDE) とを合成した形の方程式を得た。ここでは、[2] の枠では扱えなかった Witten のゲージ方程式([3])の場合について述べることにする。残念ながら、この Witten のゲージ方程式は hierarchy を考えると解空間がどんどん小さくなり、発展方程式として面白いものは出てこない。しかし、こういう現象は他の可積分系でははっきりした形で現れなかったので、将来、可積分系の定義を模索するときに役立つものと思う。

記号：

 $N = \{0, 1, 2, \dots\}$, 自然数の集合 C : 標数 0 の代数的閉体 (複素数体と思ってよい) $\mathcal{O} = C[[x_0, x_1, \dots, x_{s-1}, \dots, x_{r-1}]]$, 以下で基礎になる函数環 ($0 < s < r$) $x = (x_0, x_1, \dots, x_{r-1})$, $x'' = (x_s, \dots, x_{r-1})$, $x' = (x_0, \dots, x_{s-1})$ とする。

①で議論するのは話を簡単にするため、収束冪級数環を用いても構わないが、その場合はいちいち収束性を証明しなければならない。

^{*} 現在 大阪大 理学部

1. 我々はD加群の変形として可積分系を扱う。そこで、まず擬微分作用素について復習しよう。但し、ここで述べる擬微分作用素は[2]で扱ったものとは異なる。

\mathcal{O} 上の微分作用素の作る環 $\mathcal{D} = \mathcal{O}[D_0, D_1, \dots, D_{r-1}]$ の拡大環として、擬微分作用素の作る環 \mathcal{G} を定めよう。 $m \in \mathbb{Z}$, $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}) \in \mathbb{Z}^s$ に対して、高々m階でタイプ α の擬微分作用素の全体 $\mathcal{G}(m, \alpha)$ を

$$\mathcal{G}(m, \alpha) = \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^{r-1} \\ \beta_j \leq \alpha_j \\ |\beta| + |\gamma| \leq m}} \mathcal{O} \cdot D_X^\beta D_X^\gamma$$

とする。擬微分作用素の作る環 \mathcal{G} を、 $\mathcal{G} = \bigcup_{m, \alpha} \mathcal{G}(m, \alpha)$ で定める。 \mathcal{G} の積の構造は

$$\sum a_\alpha D_X^\alpha \cdot \sum b_\beta D_X^\beta = \sum_\gamma \binom{\alpha}{\gamma} a_\alpha \cdot b_\beta D_X^{\alpha+\beta-\gamma}$$

で定める。

[3]と同様に、この \mathcal{G} のフィルタ $\mathcal{G}(m, \alpha)$ を考えることにより、発展方程式が有限の形で得られる。一般に、 \mathcal{G} の \mathcal{O} 部分加群 \mathcal{L} に対して、 \mathcal{G} から導かれる \mathcal{L} 上のフィルタを $\mathcal{L}(m, \alpha) = \mathcal{L} \cap \mathcal{G}(m, \alpha)$ で定める。

また、 \mathcal{G} の \mathcal{O} 部分加群 \mathcal{G}_\emptyset を今回は

$$\mathcal{G}_\emptyset = \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^{r-1} \\ \exists \beta_j < 0}} \mathcal{O} \cdot D_X^\beta D_X^\gamma$$

とする。

また $P \in \mathcal{G}$ に対して、 $P_+ \in \mathcal{D}$ を $P_+ \equiv P \pmod{\mathcal{G}_\emptyset}$ で、 $P_- \in \mathcal{G}_\emptyset$ を $P_- = (P \text{ の } D_X \text{ 負冪部分})$ で定める。

\mathcal{G} の左の部分加群 \mathcal{J} についての splitting condition は次のようになる：

$$\mathcal{G}(m, \alpha) = \mathcal{J}(m, \alpha) \oplus \mathcal{G}_\emptyset(m, \alpha), \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \forall \alpha \in \mathbb{Z}^S$$

この時、 $m < 0$ ならば、 $\mathcal{G}(m, \alpha) = \mathcal{G}_\emptyset(m, \alpha)$ だから、 $\mathcal{J}(m, \alpha) = 0$ 。また、 $m = 0$ のときに

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{G}(m, \alpha) & = & \mathcal{J}(m, \alpha) & \oplus & \mathcal{G}_\emptyset(m, \alpha) \\ \psi & & \psi & & \psi \\ 1 & = & W & + & U \end{array}$$

という分解を考えると、この分解で得られた作用素 W により、 $\mathcal{J} = \mathcal{D}W$ となることが分かる。逆に、 $W_+ = 1$ となる作用素 $W \in \mathcal{G}(0, 0)$ で生成される \mathcal{G} の左の部分加群 $\mathcal{J} = \mathcal{D}W$ は上の splitting condition を満たす。以後、全て左の部分加群しか考えないので、単に \mathcal{D} 加群と呼ぶ。

3° $P \in \mathcal{G}$ を時間発展の無限小生成元として、 \mathcal{J} の時間発展 \mathcal{J}_t を次の微分方程式で定める：

$$\forall V \in \mathcal{J}, \quad \frac{\partial V}{\partial t} + VP \in \mathcal{J}_t. \quad (1)$$

一般には、こうして得られる \mathcal{J}_t は splitting condition を満たさないだけでなく、もう

\mathcal{E} の部分空間にすらならない。実は、 \mathcal{G}_t は \mathcal{E}^∞ の \mathcal{D}^∞ 部分加群と考えられるのだが、その点については[1]を参照されたい。この発展方程式(1)について、もし \mathcal{G}_t が splitting condition を満足するならば、(1)は次のWに関する方程式に帰着する：

$$\frac{\partial W}{\partial t} + WP = BW, \quad \text{ここで } B = (WPW)_+ \quad (2)$$

ここで、Wittenのゲージ方程式について復習しよう([3])：

$W = \sum_{\beta_j \leq 0} w_\beta(x'') D_{x'}^\beta$ とする。ここで、 $w_i \in \text{Mat}(k, C[[x'']])$ 、 $w_0 = 1_k$ とする。

$P \in \mathcal{E}$ として $P = D_i D_j$ ($0 \leq i < s, s \leq j < r$) を取る。 $W D_j W^{-1} = D_j + \psi_j(x', D_0)$ とおくと、発展方程式(2)の $B = D_0 D_j + (\psi_j D_n)_+$ 。 $s = 2, r = 6$ の時に本来の Witten のゲージ方程式になる。

4 我々の新しい枠組に対応する無限グラスマン多様体について述べよう。

$I = \mathbb{Z}^s \times N_C^{r-s}, I_0 = N_C^r$ とする。ここで、 $N_C = \mathbb{Z} \setminus N$ である。グラスマン多様

体を考察する基になる ambient space V を $V = \mathcal{E} / \sum_{0 \leq j < r} \mathcal{E} x_j$ とする。 V は左 \mathcal{E} 加群であ

り、基底として $e_\alpha = D^\alpha \pmod{\sum \mathcal{E} x_j}$ が取れる (ここで $\alpha \in I$)。 $V_\emptyset = \mathcal{D} \pmod{\sum \mathcal{E} x_j}$ とすると $V_\emptyset = \sum_{\alpha \in I_0} C e_\alpha$ である。我々は、 V_\emptyset とほぼ同じ大きさの V の部

分空間全体を考える。即ち、部分空間を無限サイズのフレーム ξ であらわすことにして、

$\xi = (\xi_{\mu\nu}^{a\beta})$ $a\beta \in I, \mu\nu \in I_0$ で、各列ベクトルは V の元を表し、且つ、 $\xi_{\mu\nu}^{a\beta} = \delta_{\mu\nu} (\alpha\beta \in I_0)$

となるもの全体を考える。フレーム $\xi = (\xi_{\mu\nu}^{a\beta})$ $a\beta \in I, \mu\nu \in I_0$ に対して、 I_0 サイズの行列

ξ_+ を $\xi_+ = (\xi_{\mu\nu}^{a\beta})$ $a\beta \in I_0, \mu\nu \in I_0$ で定める。

この時、上の splitting condition を満たす部分加群 $\mathcal{F} = \mathcal{O}W$ に対応するグラスマン

多様体の元 $\xi = (\xi_{\mu\nu}^{a\beta})$ $a\beta \in I, \mu\nu \in I_0$ を、 $\xi' = W^{-1}V\xi$ を正規化したフレーム $\xi =$

$\xi' \cdot \xi_+^{-1}$ で定める。この時、さらに $[W, D_{X'}] = 0$ と仮定すると次のことが成り立つ：

命題1. 上で定めた ξ について、次は1対1に対応する。

1) splitting condition を満たす部分加群 $\mathcal{F} = \mathcal{O}W$ で、 $[W, D_{X'}] = 0$ となるものの。

2) $\xi = (\xi_{\mu\nu}^{a\beta})$ $a\beta \in I, \mu\nu \in I_0$ で次の条件を満たすもの：

$$\xi_{\mu\nu}^{a\beta} = \delta_{\mu\nu} \quad (a\beta \in I_0) \quad (3a)$$

$$\xi_{\mu\nu}^{a\beta} = 0, \quad (3b)$$

但し、ある $i(0 \leq i < s)$ について、 $\mu_i > \alpha_i < 0$ または $|\mu| + |\nu| > |\alpha| + |\beta|$

$$\Lambda_i \xi \subset \xi, \quad (0 < i < s) \quad (3c)$$

ここで $\Lambda_i \in \text{End}(V)$, $\Lambda_i e_\alpha = e_{\alpha + \sigma_i}$ ($\sigma_i = (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0)$)

ξ から $W = \sum_{\alpha \beta} w_{\alpha \beta}(x'') D_X^\alpha D_X^\beta$ への対応は、 $w_{\alpha \beta} = \xi_{\iota, \iota}^{\# - \alpha + \iota, -\beta + \iota}$ で与えられる。

ここで、 $\iota = (-1, \dots, -1)$ 。 $\xi^\#$ は $\xi'' = \exp(\sum_{s < j < r} x_j \Lambda_j) \xi$ を正規化したフレイム

$\xi^\# = \xi'' \cdot \xi_+^{-1}$ で定義する。 □

5. 時間発展の方程式をグラスマン多様体の座標で書き替えよう。

命題2. 発展方程式(2)において、 $P = D^\alpha D^\beta$ とする。上で述べた対応 $W \longleftrightarrow \xi$ により、(2)は、次の $I_0 \times I_0$ 行列 Z の存在と同値である：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Lambda^\alpha \Lambda^\beta \right) \xi = \xi Z \quad (4)$$

ここで、 Z はもし存在すれば ξ から一意に定まり、(4)は ξ の成分に関する非線形方程式になる。 □

[2]の場合と異なり、以下では時間発展の生成元 P としては、 $D_i D_j$ ($0 \leq i < s$, $s \leq j < r$) の形のものしか考えない。ここで、発展方程式の初期データを決定しよう。

定理3. (3a) (3b) (3c) がなりたち、且つ、 $\alpha = \sigma_i$, $\beta = \sigma_j$ に対して (4) の Z が存在するとすると、

$$\mu_i - \beta_j > \alpha_i < 0 \quad \text{のとき,} \quad \xi_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = 0 \quad (5) \quad \square$$

以上の条件 (3 a) (3 b) (3 c) (5) が定めるグラスマン多様体上で (4) は発展方程式を定める。

定理 4. (3 a) (3 b) (3 c) (5) をみたす勝手な ξ_0 を初期値に持つ、(4) の解が一意に存在する。 解 $\xi(t)$ は $\xi' = \exp(t \Lambda_i \Lambda_j) \xi_0$ を正規化したフレーム $\xi(t) = \xi' \cdot \xi'^{-1}$ で構成される。 \square

注) ここでは具体的にフレームを用いて方程式を記述したが、この方程式はグラスマン多様体の上で不変的な意味を持つ。

文 献

- 1] 大 山 : D加群とグラスマン多様体 II
(数研講究録640・D加群と非線形可積分系 35-47, I は存在しない)
- 2] 大 山 : 高次元可積分系の hierarchy について
(数研講究録・非線形可積分系と代数解析)
- 3] N.Suzuki : Witten's gauge field equations and an infinite Grassmann manifold.
Commun. Math. Phys. 113, 155-172 (1987)